

О ПОКАЗАТЕЛЕ СХОДИМОСТИ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА ПРОБЛЕМЫ ТЕРРИ С ПОЛНЫМ МНОГОЧЛЕНОМ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

И.Ш.Джаббаров¹, Г. К.Гасанова¹, Дж. Р.Абдуллаев¹

¹Гянджинский Государственный Университет, Гянджа, Азербайджан
e-mail: ilgar_js@rambler.ru

Аннотация. В настоящей статье доказываются новые оценки снизу и сверху для полных многочленов от двух переменных. Изучаются особенности отображений, определяемых одночленами рассматриваемого многочлена. Оценки снизу и сверху, установленные для показателя сходимости достаточно близки и дают возможность определить значение показателя сходимости с точностью до 2. Метод оценки основывается на формулу для особого интеграла проблемы Терри, выражающую значение интеграла через поверхностный интеграл специального вида.

Ключевые слова: Проблема Терри, особый интеграл, поверхностный интеграл, показатель сходимости, определитель Грама.

AMS Subject Classification: 11P05.

1. Введение. Пусть

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \neq 0}}^m \alpha_{ij} x^i y^j \quad (1)$$

-некоторый полином от двух переменных x и y с действительными коэффициентами. Под особым интегралом двумерной проблемы Терри понимается интеграл

$$\theta_k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x, y)} dx dy \Bigg|^{2k} d\alpha_{10} d\alpha_{01} \dots d\alpha_{nm}. \quad (2)$$

Показателем сходимости θ_k называется такое действительное число $\gamma > 0$, для которого при $2k < \gamma$ θ_k расходится, а при $2k > \gamma$ сходится.

Проблему нахождения γ для одномерного случая поставил Хуа Ло – кен ([2]). Эта проблема была решена в [4-7, 25, 26]. Авторы, вводя понятия полного и неполного полиномов, выяснили, что значение показателя сходимости зависит от вида полинома. Создавая теорию кратных тригонометрических сумм, авторы работ [4-7, 25-26] пришли к многомерному аналогу проблемы Терри, в связи с чем они поставили вопрос о показателе сходимости особого интеграла θ_k многомерной проблемы ([4-7,

10, 11, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 27]). В [5, стр. 50] доказана общая теорема, из которой для нашего случая следует оценка сверху $\gamma \leq N \max(n, m)$, где $N = (n+1)(m+1)-1$. В [15] приведена оценка сверху, которая для (2) дает следующую границу

$$\gamma \leq 2 + (m+n)(n+1)(m+1)/2.$$

В настоящей работе получены принципиально новые оценки показателя сходимости проблемы Терри для θ_k , уточняющие ранее известные результаты. Сформулируем основные результаты. Пусть n и m - натуральные числа, $n+m > 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Интеграл θ_k расходится для натуральных k таких, что*

$$4k \leq 2 + (m+n)(n+1)(m+1)/2.$$

ТЕОРЕМА 2. *Интеграл θ_k сходится для натуральных k таких, что*

$$4k > 2 + (m+n)(n+1)(m+1)/2.$$

Из этих теорем следует, что θ_k расходится при $k \leq k_0$, и сходится, если $k > k_0$, где $k_0 = \lceil 1/2 + (m+n)(n+1)(m+1)/8 \rceil$. Следовательно, $2k_0 \leq \gamma \leq 2k_0 + 2$. Весьма вероятно, что точное значение показателя сходимости равно $\gamma = 1 + (m+n)(n+1)(m+1)/4$.

2. Основные определения и леммы.

Определение 1. Матрицу A ранга ρ мы называем матрицей структуры $(\rho_1, \dots, \rho_q)$, если ее можно представить в виде блок-матрицы ${}^tA = (A_1, \dots, A_q)$ для которой выполняются следующие условия:

- 1) $\text{rang } A_j = \rho_j$, причем все строки этого блока линейно независимы;
- 2) если к блоку A_j присоединить первую строку блока A_{j+1} , то его ранг остается неизменным.

Пусть $\mathbf{N}_0$ обозначает множество всех неотрицательных целых чисел. На этом множестве определена операция сложения и алгебра $\langle \mathbf{N}_0, + \rangle$ является коммутативным моноидом. Рассмотрим алгебру $\langle \mathbf{N}_0^r, + \rangle$, в которой операция определена покомпонентно.

Определение 2. Порядок $\prec$ мы называем нормально-лексикографическим (коротко н.-л.) порядком, если выполнены соотношения:

$$(k_{j_1}, \dots, k_{j_r}) \prec (k_{i_1}, \dots, k_{i_r}) \Leftrightarrow k_{j_1} + \dots + k_{j_r} < k_{i_1} + \dots + k_{i_r} \vee \\ \vee (k_{j_1} + \dots + k_{j_r} = k_{i_1} + \dots + k_{i_r} \wedge (k_{j_1}, \dots, k_{j_r}) \prec_1 (k_{i_1}, \dots, k_{i_r}))$$

где $\prec_1$ обозначает обычный лексикографический порядок.

Пример. Следующее множество пар представляет собой н.-л. возрастающую последовательность:

$$M = \{(0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), (0,3)\}.$$

Утверждение 1. Алгебраическая система $\langle \mathbf{N}_0^r, +, \prec \rangle$ является упорядоченным моноидом, в котором линейный и строгий порядок $\prec$ удовлетворяет соотношению:

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbf{N}_0^r)(a \prec c \wedge b \prec d \Rightarrow a + c \prec b + d).$$

Доказательство. Пусть $a = (a_1, \dots, a_r), b = (b_1, \dots, b_r), c = (c_1, \dots, c_r), d = (d_1, \dots, d_r)$.

Рассмотрим два случая:

$$1) a_1 + \dots + a_r < c_1 + \dots + c_r \vee b_1 + \dots + b_r < d_1 + \dots + d_r;$$

$$2) a_1 + \dots + a_r = c_1 + \dots + c_r \wedge b_1 + \dots + b_r = d_1 + \dots + d_r;$$

В первом случае имеем: $a_1 + \dots + a_r + b_1 + \dots + b_r < c_1 + \dots + c_r + d_1 + \dots + d_r$; т. к. из соотношения $b \prec d$ следует, что если $a_1 + \dots + a_r < c_1 + \dots + c_r$, то

$$b_1 + \dots + b_r = d_1 + \dots + d_r \vee b_1 + \dots + b_r < d_1 + \dots + d_r.$$

Таким образом, в обоих случаях $a + c \prec b + d$. Рассмотрим теперь случай 2). Пусть условие $b_1 + \dots + b_r = d_1 + \dots + d_r \wedge b_1 + \dots + b_r < d_1 + \dots + d_r$ выполнено. Тогда $a_1 + \dots + a_r + b_1 + \dots + b_r = c_1 + \dots + c_r + d_1 + \dots + d_r$ и требуемый результат следует из свойств порядка. Утверждение 1 доказано.

Определение 3. Пусть задан многочлен $F(x_1, \dots, x_r) \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_r]$. Мы говорим, что его члены расположены по н.-л. порядку, если множество M кортежей, составленных из степеней одночленов является н.-л. упорядоченным множеством. Одночлен, соответствующий высшему члену множества M мы называем старшим членом многочлена.

Следующее утверждение является прямым следствием утверждения 1.

Утверждение 2. Старший член произведения двух многочленов равен произведению старших членов этих многочленов.

Лемма 1.5.1. Пусть задан одночлен $a x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$ с ненулевым множителем a и положительными показателями $k_1, \dots, k_r > 0$. Тогда матрица Якоби системы координатных функций градиента этого одночлена имеет максимальный ранг для всех точек $\bar{x}$, за исключением точек, у которых хотя бы одна из координат равна нулю.

Обозначим через M_n транспонированную матрицу показателей т. е.

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & m \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Если число столбцов этой матрицы является четным числом, то она имеет структуру $(2, 2, \dots, 2)$, в противном случае -структуру $(2, 2, \dots, 2, 1)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) число столбцов M_n является четным числом; 2) число столбцов M_n является нечетным числом.

1) Разобьем матрицу M_n на блоки порядка 2. Назовем блок блоком ступени k , если сумма элементов каждого столбца равна k . Остальные блоки назовем смешанными. К примеру блоки $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ принадлежат ступени 4, но блок $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ является смешанным. Все смешанные блоки имеют вид $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$ (если $k+1 \leq m$), или вид $\begin{pmatrix} k & k-m+1 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ (если $n+1 \geq k+1 > m$), или же вид $\begin{pmatrix} n & k+1-m \\ k-n & m \end{pmatrix}$ (если $m+n-1 \geq k > n$). Так как

$$\det \begin{pmatrix} n & n-m+1+a \\ a & m \end{pmatrix} = nm - an + am - a - a^2 \geq n(m-a) > 0,$$

то смешанный блок невырожден. Блок ступени k имеет вид $\begin{pmatrix} a & a+1 \\ b & b-1 \end{pmatrix}$, где $a+b=k, a \geq 0$. Все они также невырождены и лемма доказана для случая 1). В случае 2) все сказанные выше остаются в силе для первых всех $n-1$ столбцов M_n . Поэтому, лемма 1 полностью доказана.

Замечание. В [17] матрица коэффициентов (3) удовлетворяют условиям леммы 1, что без доказательства было принято в [17].

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть в ограниченной замкнутой области Ω n -мерного пространства задана непрерывная функция $f(\bar{x})$ и непрерывно дифференцируемые функции $f_j(\bar{x})$, где $j=1, \dots, r$, (здесь $r < n$), такие, что матрица Якоби имеет всюду в Ω максимальный ранг. Пусть, далее $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ и найдется внутренняя точка $\bar{x}_0$ области Ω такая, что $f_1(x_0) = \xi_1, \dots, f_r(x_0) = \xi_r$.

Тогда имеет место равенство

$$\frac{\partial^r}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_r} \int_{\Omega(\bar{\xi})} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_M f(\bar{x}) \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

где $\Omega(\bar{\xi})$ - подобласть, определяемая системой неравенств $f_j(\bar{x}) \leq \xi_j$, M - поверхность, определяемая системой уравнений $f_j(\bar{x}) = \xi_j$ ($j=1, \dots, r$), а G - определитель Грама градиентов функций $f_j(\bar{x})$, т. е. $G = |(\nabla f_i, \nabla f_j)|$.

Замечание. Следует заметить, поверхностный интеграл в утверждении леммы берется в «несобственном» смысле, и дифференцирование в левой части последнего равенства берется в одностороннем смысле, т.е. изнутри области $\Omega(\bar{\xi})$ см. [3, 15, 16, 17, 19].

Следствие. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда имеет место равенство

$$\int_{\Omega} f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{m_1}^{M_1} \dots \int_{m_r}^{M_r} du_1 \dots du_r \int_M f(\bar{x}) \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

где $m_j \leq f_j(\bar{x}) \leq M_j, M = M(\bar{u})$ - поверхность, определяемая системой $u_j = f_j, j = 1, \dots, r$, а G - определитель Грама градиентов функций, определяющих M .

Лемма 2. Пусть поверхность M определена системой уравнений

$$f_1(\bar{x}) = 0,$$

...

$$f_r(\bar{x}) = 0,$$

где $r \leq n, \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n, \Omega$ - ограниченная и замкнутая жорданова область и функции $f_j(\bar{x})$ непрерывно дифференцируемы в некоторой открытой области Ω_0 включающей внутри себя Ω . Пусть $G = G(x)$ - определитель Грама градиентов функций $f_j(\bar{x})$, не равный нулю в Ω . Пусть, далее, преобразование координат $\bar{x} = \bar{x}(\bar{\xi})$, взаимно однозначно отображает некоторую область Ω' в область Ω , с не особой матрицей Якоби

$$Q = Q(\xi) = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right\|_{1 \leq i, j \leq n},$$

имеющей непрерывные в Ω элементы.

Тогда для любой непрерывной функции $f(\bar{x})$, имеет место формула

$$\int_M f(\bar{x}) \frac{ds}{\sqrt{G}} = \int_{M'} |\det Q| f(\bar{x}(\bar{\xi})) \frac{d\sigma}{\sqrt{G'}},$$

$$G' = \det(JQ \cdot {}^t Q' J),$$

где M' - прообраз поверхности M при этом преобразовании, $d\sigma$ - элемент площади M' в координатах $\bar{\xi}$, J - матрица Якоби системы функций $f_1, \dots, f_r$.

Лемма 3. Пусть $F(x, y)$ определен равенством (1). Тогда при $2k \geq N$ справедлива формула

$$\mathcal{G}_k = (2\pi)^N \int_{\Pi} \frac{ds}{\sqrt{G_0}},$$

где поверхностный интеграл берется по поверхности Π , определяемой системой уравнений

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k - x_{k+1} - x_{k+2} - \dots - x_{2k} = 0,$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k - y_{k+1} - y_{k+2} - \dots - y_{2k} = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_1^i y_1^j + x_2^i y_2^j + \dots + x_k^i y_k^j - x_{k+1}^i y_{k+1}^j - x_{k+2}^i y_{k+2}^j - \dots - x_{2k}^i y_{2k}^j = 0, \quad (3)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_1^n y_1^m + x_2^n y_2^m + \dots + x_k^n y_k^m - x_{k+1}^n y_{k+1}^m - x_{k+2}^n y_{k+2}^m - \dots - x_{2k}^n y_{2k}^m = 0,$$

в $4k$ - мерном единичном кубе, $N = (n+1)(m+1) - 1$ выражает число мономов полинома $F(x, y)$, а G_0 - определитель Грама градиентов функций, стоящих на левых частях системы (3), т.е. $G_0 = \det(A_0^t A_0)$ и

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ix_1^{i-1} y_1^j & jx_1^i y_1^{j-1} & ix_2^{i-1} y_2^j & jx_2^i y_2^{j-1} & \dots & -ix_{2k}^{i-1} y_{2k}^j & -jx_{2k}^i y_{2k}^{j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ nx_1^{n-1} y_1^m & mx_1^n y_1^{m-1} & nx_2^{n-1} y_2^m & mx_2^n y_2^{m-1} & \dots & -nx_{2k}^{n-1} y_{2k}^m & -mx_{2k}^n y_{2k}^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Лемма 4. При условиях леммы 2 имеет место формула

$$\mathcal{I}_k = 2^N \Gamma(1 + N/2) \pi^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\Pi(\bar{a})} ds \right) da_{01} \dots da_{nm}$$

где $\bar{a} = (\alpha_{01}, \dots, \alpha_{nm})$, $\Pi(\bar{a})$ - часть поверхности, определяемой в $4k$ - мерном единичном кубе системой уравнений (3) и неравенством

$$\sum_{j=1}^{2k} \left(\left| \frac{\partial F(x_j, y_j)}{\partial x_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial F(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right|^2 \right) \leq 1,$$

где Γ - гамма-функция Эйлера; эта формула понимается в том смысле, что если сходится одна из двух частей, то сходится и другая.

Доказательство получается из леммы 3 и известного соотношения

$$(\sqrt{G_0})^{-1} = \frac{\Gamma(N/2 + 1)}{\pi^{N/2}} \int_{\|A_0 \bar{a}\| \leq 1} d\alpha_{01} \dots d\alpha_{nm},$$

(см.[9, стр. 125]) где A_0 означает матрицу Якоби системы функций f_{ij} .

Лемма 5. Пусть $(x_1, y_1, \dots, x_{2k}, y_{2k})$ произвольное решение системы (3). Тогда для произвольных действительных a и b $(x_1 + a, y_1 + b, \dots, x_{2k} + a, y_{2k} + b)$ также будет решением системы (3).

Доказательство. Возьмем произвольное уравнение системы (3):

$$x_1^i y_1^j + \dots + x_k^i y_k^j - x_{k+1}^i y_{k+1}^j - \dots - x_{2k}^i y_{2k}^j = 0,$$

Имеем:

$$(x+a)^i (y+b)^j = \sum_{r=0}^i \sum_{t=0}^j \binom{i}{r} \binom{j}{t} x^{i-r} y^{j-t} a^r b^t \quad (4)$$

Поэтому, полагая $\varepsilon_s = 1$ при $s \leq k$ и $\varepsilon_s = -1$ при $s > k$ получим:

$$\sum_{s=1}^{2k} \varepsilon_s (x_s + a)^i (y_s + b)^j = \sum_{r=0}^i \sum_{t=0}^j \binom{i}{r} \binom{j}{t} \sum_{s=1}^{2k} \varepsilon_s x_s^{i-r} y_s^{j-t} a^r b^t. \quad (5)$$

Внутренняя сумма по s в правой части (5) равна нулю при любых указанных r и t . Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 5, а $G_0 = G_0(\bar{x})$ определен леммой 3. Тогда для любого вектора $\bar{a} = (a, b, \dots, a, b)$ имеет место равенство

$$G_0(\bar{x}) = G_0(\bar{x} + \bar{a}).$$

Доказательства этих вспомогательных утверждений можно найти в [14, 15, 16, 17].

4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Будем воспользоваться леммой 4. Пусть E – множество тех (x, y) из единичного квадрата, для которых $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leq \frac{1}{2k}$.

Обозначим через $\Pi'(\bar{\alpha})$ часть поверхности $\Pi(\bar{\alpha})$ из леммы 4, лежащую в декартовом произведении E^{2k} . Тогда на $\Pi'(\bar{\alpha})$ условие

$$\sum_{j=1}^{2k} \left(\left| \frac{\partial F(x_j, y_j)}{\partial x_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial F(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right|^2 \right) \leq 1$$

можно опустить, т.к. для любого $(x_1, y_1, \dots, x_{2k}, y_{2k}) \in E^{2k}$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{2k} \left(\left| \frac{\partial F(x_j, y_j)}{\partial x_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial F(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right|^2 \right) \leq \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{2k} \leq 1.$$

Поэтому,

$$\theta_k \geq 2^N \pi^{N/2} \Gamma(1 + N/2) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\Pi'(\bar{\alpha})} ds \right) d\alpha_{01} \dots d\alpha_{nm}.$$

Здесь уже $\Pi'(\bar{\alpha})$ определяется лишь системой (3) в E^{2k} .

Перепишем полином $F(x, y)$ в ином виде, используя ряд Тейлора в точке $\bar{u} = (u_1, u_2)$:

$$F(x, y) = \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^m \beta(\bar{s})(x - u_1)^{s_1} (y - u_2)^{s_2}; \quad \bar{s} = (s_1, s_2). \quad (6)$$

Тогда,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^m s_1 \beta(\bar{s})(x - u_1)^{s_1-1} (y - u_2)^{s_2}$$

Пусть для всех коэффициентов $\beta(\bar{s})$ (кроме $\beta(n, m) = \alpha_{nm}$) имеют место неравенства

$$|\beta(\bar{s})| \leq 0,1cP^{s_1+s_2-1}, \quad (7)$$

при $s_1 + s_2 \geq 1$ и некоторых $P > 0$ и $c > 0$. Если для старшего коэффициента α_{nm} выполняется неравенство

$$2^{-1}cP^{n+m-1} \leq \alpha_{nm} \leq cP^{n+m-1}. \quad (8)$$

тогда при $u_1 - P^{-1} \leq x \leq u_1, u_2 - P^{-1} \leq y \leq u_2$ будем иметь

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leq \left(\sum_{s_1 \geq 1} \sum_{s_2} s_1 c \cdot P^{s_1+s_2-1} \cdot P^{-(s_1+s_2-1)}\right)^2 + \left(\sum_{s_1 \geq 0} \sum_{s_2 \geq 1} s_2 c \cdot P^{s_1+s_2-1} \cdot P^{-(s_1+s_2-1)}\right)^2 \leq (n^2 + m^2)(nmc)^2.$$

Полагая $c = (nm\sqrt{2k(n^2 + m^2)})^{-1}$, можно заметить, что при условиях (8) такие точки (x, y) принадлежат E , т. к. в этом случае

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leq \frac{1}{2k}. \quad (9)$$

Из равенства (6) сравнением коэффициентов получаем

$$\alpha(n-1, m) = -u_1 \beta(n, m) - \beta(n-1, m),$$

$$\alpha'(n-1, m) = -u'_1 \beta(n, m) - \beta'(n-1, m),$$

$$\alpha(n-1, m) - \alpha'(n-1, m) = (u'_1 - u_1) \beta(n, m) + R,$$

где

$$|R| \leq 2 \max(|\beta(n-1, m)|, |\beta'(n-1, m)|).$$

Пусть u'_1 и u_1 будут дробями вида

$$u_1 = \frac{v_1}{P}, \quad u'_1 = \frac{v'_1}{P}, \quad v_1 \neq v'_1$$

$1 \leq v_1 \leq P, \quad 1 \leq v'_1 \leq P, \quad v_1, v'_1, P$ - натуральные. Если при $\bar{s} \neq (n, m)$

$$|\beta(\bar{s})| \leq 0, 1 P^{s_1+s_2-1},$$

то будем иметь

$$\alpha(n-1, m) - \alpha'(n-1, m) = \frac{v'_1 - v_1}{P} \beta(n, m) + \theta \frac{c}{5} \cdot P^{n+m-1},$$

где $|\theta| < 1, \beta(n, m) = \alpha(n, m) = \alpha_{nm} > c P^{n+m-1} / 2$. Поскольку $|v'_1 - v_1| \geq 1$, то из этого следует

$$\alpha(n-1, m) \neq \alpha'(n-1, m), \quad (10)$$

т.е. в сделанных выше предположениях разложения (6), в разных точках $\bar{u}$ и $\bar{u}'$ соответствует различным $\bar{\alpha}$. Пользуясь этим оценим θ_k снизу.

Имеем:

$$\theta_k \geq 2^N \pi^{N/2} \Gamma(1 + N/2) \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\pi_m} \left(\int_{\Pi'(\bar{\alpha})} ds \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_N;$$

здесь область π_m определяется условиями (7-8). Промежутки изменения переменных x_j, y_j разобьем на P_m частей, точками $u_i = v_i / P_m, v_i = 1, \dots, P_m, i = 1, 2$. Представим $F(x_j, y_j)$ в виде (6) с $u_i = v_i / P_m, i = 1, 2$ в каждом куске $\Pi'_{m, \bar{v}}(\bar{\alpha})$ поверхности $\Pi'(\bar{\alpha})$, определяемой условиями $\frac{v_1-1}{P_m} < x_j \leq \frac{v_1}{P_m}, \frac{v_2-1}{P_m} < y_j \leq \frac{v_2}{P_m}, j = 1, \dots, 2k$. При каждом $\bar{\alpha}$, мы лишь уменьшим поверхностный интеграл,

заменяя его суммой интегралов по этим кускам. При этом π_m разобьется на части $\pi_{m,\bar{v}}$, $\bar{v} = (v_1, v_2)$ в соответствии с таким разбиением

$$\pi_m = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\bar{v}} \pi_{m,\bar{v}};$$

здесь $\pi_{m,\bar{v}}$ для каждого $\bar{v} = (v_1, v_2)$ состоит из всех $\bar{\alpha}$, для которых выполнены условия (7) и (8). Таким образом, получаем:

$$\theta_k \geq 2^N \pi^{N/2} \Gamma(1 + N/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{v_1=1}^{P_m} \sum_{v_2=1}^{P_m} \int_{(\pi_{m,\bar{v}})} \dots \int_{\Pi'_{m,\bar{v}}(\bar{\alpha})} (\int ds) d\alpha_{10} \dots d\alpha_{nm}. \quad (11)$$

Как показано выше, при условиях (7) и (8) имеет место (10) т. е. области интегрирования по $\bar{\alpha}$, для различных пар $(m, \bar{v})$, не пересекаются. Сравнивая коэффициенты в (1) и (6) замечаем, что

$$\alpha_{st} = \sum_{p=s}^n \sum_{q=t}^m (-1)^{p-s+q-t} \binom{p}{s} \binom{q}{t} \beta(p, q) u_1^{p-s} u_2^{q-t} \quad (12)$$

Упорядочим наборы (s, t) таким образом: если $s + t < s' + t'$, то набор (s, t) предшествует набору (s', t') ; если $s + t = s' + t'$, то сравниваем первые, а затем вторые компоненты, и когда $s < s'$ или $s = s', t < t'$, то будем считать, что набор (s, t) предшествует набору (s', t') . При таком упорядочении соотношения (12) могут быть записаны в следующей матричной форме $\bar{\alpha} = U\bar{\beta}$, где $\bar{\alpha}$ - вектор с компонентами α_{st} , а $\bar{\beta}$ - вектор с компонентами $\beta(s, t)$, взятыми в только что введенном порядке по убыванию. Из (12) видно, что каждое уравнение на правой части содержит все «старшие» наборы индексов (p, q) начиная с (s, t) , причем коэффициент при $\beta(p, q)$ равен 1. Это означает что U - треугольная матрица с нулевыми элементами выше главной диагонали, а диагональные элементы равны 1:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к (11), на правой части под интегралом, с переменными интегрирования $\alpha_{10}, \dots, \alpha_{nm}$, произведем во внешнем интеграле замену переменных по формулам (12). Якобиан замены равен 1. Получим:

$$\theta_k \geq 2^N \pi^{N/2} \Gamma(1 + N/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{v_1=1}^{P_m} \sum_{v_2=1}^{P_m} \int_{(\pi_{m,\bar{v}})} \dots \int_{\Pi'_{m,\bar{v}}(\bar{\alpha})} (\int ds) d\beta'_1 \dots d\beta'_N,$$

где $\pi'_{m,\bar{v}}$ образ $\pi_{m,\bar{v}}$ при этой замене переменных. Так как точки, лежащие на $\Pi'_{m,\bar{v}}(\bar{\alpha})$, принадлежат E^{2k} , то на $\Pi'_{m,\bar{v}}(\bar{\alpha})$ переменные связаны лишь условиями (3), и неравенствами:

$$\frac{\nu_1-1}{P_m} < x_j \leq \frac{\nu_1}{P_m}, \quad \frac{\nu_2-1}{P_m} < y_j \leq \frac{\nu_2}{P_m}; j=1,...,2k$$

По лемме 5, всякому решению системы (3) соответствует серия решений

$$\bar{x}'_s = \bar{x}_s + \bar{a}(\nu), \quad s=1,...,2k,$$

где $\bar{a}(\bar{\nu})$ - произвольный вектор вида $\left(-\frac{\nu_1-1}{P_m}, -\frac{\nu_2-1}{P_m}, ..., -\frac{\nu_1-1}{P_m}, -\frac{\nu_2-1}{P_m}\right)$, т.е. в поверхностном интеграле по $\Pi'_{m,\bar{\nu}}(\bar{\alpha})$ можно произвести параллельный перенос на вектор $\bar{a}(\bar{\nu})$. Тогда мы получим кусок поверхности $\Pi(m)$, где переменные связаны лишь условиями (3) и неравенствами

$$0 \leq x_j, y_j \leq P_m^{-1}, j=1,...,2k.$$

Поэтому

$$\theta_k \geq 2^N \pi^{N/2} \Gamma(1+N/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{P_m} \sum_{\nu_2=1}^{P_m} \int_{\Pi(m)} ... \int (\int ds) d\beta_1 ... d\beta_N. \quad (13)$$

Применяя лемму 1, в интеграле по $\Pi(m)$ произведем замену переменных

$$x_j = P_m^{-1} \cdot z_j, y_j = P_m^{-1} w_j, \quad j=1,...,2k.$$

Матрица Q в этом преобразовании- диагональная, с диагональными элементами равными P_m^{-1} , т. е. $Q = P_m^{-1} \cdot J$, где J - единичная матрица порядка $4k$. Обозначая через Π_0 поверхность, определяемую системой (3) и условиями $0 \leq z_j \leq 1, 0 \leq w_j \leq 1, j=1,...,2k$, получим согласно лемме 2

$$\int_{\Pi(m)} ds = P_m^{-2kr+N} \int_{\Pi_0} ds,$$

так как, в обозначениях леммы 2

$$G' = \det(BQ \cdot {}^t Q \cdot {}^t B) = P_m^{-2N} \det(B \cdot {}^t B) = P_m^{-2N} \cdot G.$$

Через $\mathcal{K}$ обозначим интеграл

$$\mathcal{K} = \int_{\Pi_0} ds.$$

Он зависит лишь от системы (3). Теперь из (13) следует

$$\begin{aligned} \theta_k &\geq \mathcal{K} 2^N \pi^{N/2} \Gamma(1+N/2) \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{-4k+N+2} \int_{|\beta_{nm}| \leq \frac{C}{2} P^{n+m-1}} d\beta_N \times ... \times \int_{|\beta_{10}| \leq \frac{C}{10}} d\beta_1 \geq \\ &\geq \mathcal{K} \sum_{m=0}^{\infty} (2^m)^{-4k+N+2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0, i+j>0}^m (i+j-1) = \sum_{m=0}^{\infty} (2^m)^{-4k+2+\frac{(n+m)(n+1)(m+1)}{2}}; \\ \mathcal{K} &= 2^N \pi^{N/2} \Gamma(1+N/2) \left(nm \sqrt{2k(n^2+m^2)} \right) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0, i+j>0}^m (i+j-1). \end{aligned}$$

Ряд по m будет расходящимся при $4k \leq 2 + \frac{(n+m)(n+1)(m+1)}{2}$, если только $K > 0$. Если $n + m \geq 4$, тогда найдется натуральное k такое, что $1 + (n+m)(n+1)(m+1)/4 \geq 2k \geq N$, т.к. $1 - N + (n+m)(n+1)(m+1)/4 \geq 2$. Тогда система (3) имеет тривиальное решение с произвольными $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$, которых можно выбрать таким образом, чтобы G_0 не обращался в нуль. По теореме о неявных функциях система (3) определяет $4k - N$ -мерное подмногообразие в некоторой окрестности взятой точки, где $G_0 \neq 0$. Следовательно, $K > 0$.

Пусть теперь $n + m < 4$. Тогда либо $n = m = 1$, либо (в силу симметрии) $n = 2, m = 1$. Докажем расходимость θ_k в этих случаях непосредственно.

Случай $n = m = 1$. Наибольшее k такое, что выполнено условие теоремы равно 1. Имеем $F(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma xy$.

Тогда

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y)} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i \gamma xy} e^{2\pi i (\alpha x + \beta y)} dx dy.$$

Применим равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y)} dx dy \left| d\alpha d\beta \right|^2 = 4\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{2\pi i \gamma xy} \right|^2 dx dy = 4\pi^2.$$

Интегрируя по γ , получаем расходящийся интеграл.

Случай $n = 2, m = 1$. В этом случае $F(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta x^2 + \varepsilon x^2 y$.

Рассмотрим интеграл

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y)} dx dy \right)^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i [\alpha(x+u) + \beta(y+v) + \gamma(xy+uv) + \delta(x^2+u^2) + \varepsilon(x^2 y + u^2 v)]} dx dy du dv. \quad (14)$$

Произведем замену переменных $t_1 = x + u, t_2 = y + v, t_3 = xy + uv, t_4 = x^2 + u^2$.

Матрица Якоби этой системы функций по переменным x, y, u, v равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ y & x & v & u \\ 2x & 0 & 2u & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель D этой матрицы отличен от нуля, когда $u \neq x$. Следовательно, замена переменных взаимно — однозначна вне гиперплоскости $u = x$ в четырехмерном пространстве переменных x, y, u, v . Таким образом, интеграл

(14) является преобразованием Фурье функции $D^{-1}e^{2\pi i(x^2y+u^2v)}$, если рассмотреть ее как функцию от t_1, t_2, t_3, t_4 :

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y)} dx dy \right)^2 = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 e^{2\pi i [\alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 + \delta t_4]} D^{-1} e^{2\pi i \varepsilon (x^2 y + u^2 v)} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Отсюда, как и выше заключаем, что при $\varepsilon \in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y)} dx dy \right|^4 d\alpha d\beta d\gamma d\delta = 4\pi^2 \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{dt_1 dt_2 dt_3 dt_4}{D^2} > 0.$$

Интегрируя по ε , получаем расходящийся интеграл. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть теперь $4k > 2 + (n+m)(n+1)(m+1)/2$.

По лемме 3

$$\theta_k = (2\pi)^N \int_{\Pi} \frac{ds}{\sqrt{G}}, \quad (15)$$

причем интеграл на правой части понимается в несобственном смысле. Уравнение $G_0 = 0$ определяет на Π подмногообразие меньшей размерности, кроме того, то, что оно имеет меру нуль, следует также из проведенных ниже оценок. Сходимость (15) мы получим из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n; I_n = \int_{\Pi_n} \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

где Π_n – часть поверхности Π , определяемая неравенствами $2^{-2n}G \leq G_0 \leq 2^{2-2n}G$,

$$G = \max_{E^{2k}} G_0.$$

Оценим I_n . Сначала под интегралом произведем замену переменных по формулам $x_j = (2h)^\alpha u_j, y_j = (2h)^\alpha v_j; j = 1, \dots, 2k$, где $\alpha^{-1} = 1 + (n+m-2)(n+1)(m+1)/2$, $h = \sqrt{G} \cdot 2^{-n}$. Матрица Якоби Q этого преобразования - диагональная матрица порядка $4k$, определитель которой равен $(2h)^{4k\alpha}$. Так как $\sum_{i+j>0} (i+j-1) = \alpha^{-1}$, то

по лемме 2 имеем $G'_0 = \det(A_0 Q^{-1} Q^t A_0) = (2h)^{2\alpha N + 2} \cdot G''_0$, причем G''_0 имеет такой же вид, что и G_0 , но только переменные интегрирования u_j, v_j меняются в пределах $0 \leq u_j, v_j \leq (2h)^{-\alpha}$. Тогда, обозначая Π'_n образ Π_n при этом преобразовании, $d\sigma$ – элемент площади преобразованной поверхности, получим

$$I_n = (2h)^{4k\alpha - \alpha N - 1} \int_{\Pi'_n} \frac{d\sigma}{\sqrt{G''_0}}; \quad \frac{1}{2} \leq G''_0 \leq 1.$$

Точки лежащие на Π'_n удовлетворяют системе (3). По лемме 5 вместе с каждым решением $\bar{u} = (u_1, \dots, v_{2k})$ система (3) имеет также и решение $u' = (u'_1, \dots, v'_{2k})$, где $\bar{u}' = \bar{u} + \bar{a}$, $\bar{a} = (a, b, \dots, a, b)$, $a, b \in R$. Точка $\bar{u}$ может лежать

на Π'_n если $|a|, |b| \leq 2h^{-\alpha}$. Согласно лемме 6 $G(\bar{u}) = G(\bar{u} + \bar{a})$ на Π'_n ($\partial G / \partial \bar{a} = 0$). Теперь возьмем подмногообразие Π_n^0 (для чего достаточно фиксировать переменные $u_1 = u_0, v_1 = v_0$) размерности $4k - 2 - N$ с максимальной площадью такое, что Π'_n получается из этого подмногообразия параллельными переносами на вектор $\bar{a}$. Тогда

$$I_n \ll (2h)^{4k\alpha - N\alpha - 2\alpha - 1} \int_{\Pi_n^0} \frac{d\sigma}{\sqrt{G_0''}} \ll (2h)^{4k\alpha - N\alpha - 2\alpha - 1} \int_{\Pi_n^0, G_0'' \leq 1} d\sigma \quad (16)$$

Из элементов матрицы A_0 (заметим, что мы добавили две строки соответствующие уравнениям $u_1 = u_0, v_1 = v_0$) составим новую блочную матрицу D_0 следующим образом. Пусть l наименьшее натуральное число такое, что $lN \geq 4k - N - 2$. Составим l подматриц порядка N из попарно различных столбцов матрицы A_0 и расположим эти подматрицы на диагонали (остальные элементы нулевые), причем одну из этих подматриц возьмем прямоугольным, так, чтобы D_0 стала матрицей размера $lN \times 4k$. В качестве l достаточно взять $l = \lceil 4k/N \rceil$ (по условиям теоремы $l \geq 1$). Важно, что число ее строк не меньше размерности многообразия Π_n^0 . Пусть $M_1, \dots, M_l$ подматрицы, из которых составлена D_0 . Тогда имеем

$$\det(D_0 \cdot {}^t D_0) = \prod_{1 \leq q \leq l} \det(M_q \cdot {}^t M_q) \leq \left(\sum_{1 \leq q \leq l} \det(M_q \cdot {}^t M_q) \right)^l \cdot l^{-l} \leq l^{-l}.$$

Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, $m = lN$ являются сингулярными числами матрицы D_0 (см. [12, стр. 270, или 13, стр. 79], [14]). Рассмотрим произведения из $s = 4k - N - 2$ множителей:

$$b_1 = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_s, \quad b_2 = \rho_2 \dots \rho_s \rho_{s+1}, \dots, \quad b_m = \rho_m \rho_1, \dots, \rho_{s-1}.$$

Каждое сингулярное число входит в эти произведения равно s раз. Имеем

$$b_1 b_2 \dots b_m = (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m)^s \leq l^{-ls}.$$

Тогда хотя бы одно из произведений, а именно, произведение наименьших сингулярных чисел, скажем b_1 , удовлетворяет неравенству $b_1 \leq l^{-ls/m}$. Поскольку сингулярные числа являются алгебраическими функциями, то рассматриваемая поверхность разбивается на конечное, не зависящее от n число кусков, где неравенство вида $b_1 \leq l^{-ls/m}$ сохраняется для фиксированного произведения b_j (скажем для b_1). Оценим интеграл (16), замечая, что на некоторой части Π_n^0 выполняется неравенство $b_1 \leq l^{-ls/m}$.

Очевидно, $\int_{\Pi_n^0, G_0 \leq 1} d\sigma \ll \int_{\Pi_n^0, b_1 \leq H} d\sigma; H = l^{-ls/m}$. Оценим последний поверхностный

интеграл. Известно, что единичный куб разбивается на конечное, не зависящее от n число подобластей, где система (3) допускает однозначную разрешимость, со свободными переменными $\xi_1, \dots, \xi_{4k-N-2}$ [22, 24, 28]. Каждая такая область разбивается на не более, чем $\binom{4k}{N}$ подобластей, где один из

миноров матрицы A_0 принимает максимальные значения среди всех миноров. Пусть T общее число этих подобластей, Ω_0 - подобласть, где содержится макси-мальный кусок Π_n^0 поверхности, ω_0 - соответствующая область изменения новых независимых переменных. Тогда переходя в поверхностном интеграле к независимым переменным, получим

$$\int_{\Pi_n^0, b_1 \leq H} d\sigma \leq T \binom{4k}{N}^{1/2} \int_{\omega_0, b_1 \leq H} d\xi_1 \dots d\xi_{4k-N-2}. \quad (18)$$

Сказанные выше замечания остаются в силе, если в качестве A_0 принять матрицу D_0 . Докажем, что в ω_0 возможна взаимно – однозначная замена переменных $\eta_1 = \rho_1(\bar{\xi}), \dots, \eta_s = \rho_s(\bar{\xi})$, где $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{4k-N-2})$, и сингулярные числа ρ_j , входящие в произведение b_1 , рассматриваются как функции $\bar{\xi}$. Для этого достаточно доказать, что якобиан $\frac{D(\rho_1, \dots, \rho_s)}{D(\xi_1, \dots, \xi_s)}$ отличен от нуля. Пусть

системы векторов $\bar{t}_1(\bar{\xi}), \dots, \bar{t}_m(\bar{\xi})$ и $\bar{q}_1(\xi), \dots, \bar{q}_m(\xi)$ суть сингулярные базисы матрицы D_0 (см. [12, стр.271, или 13, стр. 80]), при этом $\bar{t}_j(\bar{\xi}) \in R^m, j=1, \dots, m$, $\bar{q}_i(\bar{\xi}) \in R^m, i=1, \dots, m$. Имеем следующие равенства ([1]):

$$\rho_j = (D_0 \bar{t}_j, \bar{q}_j), \quad D_0 \bar{t}_j = \rho_j \bar{q}_j, {}^t D_0 \bar{t}_j = \rho_j \bar{t}_j, \quad (19)$$

$j=1, \dots, s$. Тогда

$$\frac{d\rho_j}{d\xi_i} = \left(\frac{\partial D_0}{\partial \xi_i} \bar{t}_j, \bar{q}_j \right) + \left(D_0 \frac{\partial \bar{t}_j}{\partial \xi_i}, \bar{q}_j \right) + \left(D_0 \bar{t}_j, \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \xi_i} \right) = \left(\frac{\partial D_0}{\partial \xi_i} \bar{t}_j, \bar{q}_j \right) + \left(\frac{\partial \bar{t}_j}{\partial \xi_i}, {}^t D_0 \bar{q}_j \right) + \left(D_0 \bar{t}_j, \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \xi_i} \right).$$

Используя равенства (19) и тот факт, что для произвольного единичного вектора $\bar{c}(\bar{\xi}) \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi_i}, \bar{c} \right) = 0$ (см.[27, стр.53]), мы получим следующее важное соотношение

$$\frac{d\rho_j}{d\xi_i} = \left(\frac{\partial D_0}{\partial \xi_i} \bar{t}_j, \bar{q}_j \right) \quad j=1, \dots, s, i=1, \dots, s,$$

показывающее, что векторы сингулярного базиса при дифференцировании сингулярного спектра (см. [12, 13]) ведут себя как постоянные векторы. Кроме того, эти соотношения показывают, что для матрицы Якоби данной

замены имеем $U(\bar{\xi}) = D'_{0\bar{\xi}} \cdot B$, где $D'_{0\bar{\xi}}$ транспонированная матрица Якоби системы функций (см. [1]), получаемая расположением строк D_0 последовательно в строку

$$f_{11}, \dots, f_{1m}, f_{21}, \dots, f_{2m}, \dots, f_{s1}, \dots, f_{sm} \quad (20)$$

(f_{ij} рассматриваются как функции от $\bar{\xi}$, а B – матрица размера $m^2 \times s$, состоящая из столбцов $\bar{t}_1 \otimes \bar{q}_1, \dots, \bar{t}_s \otimes \bar{q}_s$ принадлежащих тензорному произведению $R^m \otimes R^m$). Матрица $D'_{0\bar{\xi}}$ как матрица размера $s \times m^2$ имеет s ненулевых (см. ниже) сингулярных чисел, которым соответствуют s пар ортонормальных векторов в R^s и $R^m \otimes R^m$, образующих сингулярные базисы. Отображение, переводящее столбцы B в векторы соответствующего базиса является изометрией подпространств в $R^m \otimes R^m$ и, поэтому, может продолжена до изометрии $P \otimes Q$ всего пространства (см. [7]). Тогда $P\bar{t}_j \otimes Q\bar{q}_j$ при $j=1, \dots, s$, будут векторами сингулярного базиса соответствующими ненулевым сингулярным числам. Следовательно, сингулярное разложение $D'_{0\bar{\xi}}$ имеет вид $Q'\Lambda T'$, где Q' и T' – ортогональные матрицы порядков соответственно s и m^2 , а Λ – ступенчатая матрица, содержащая сингулярные числа матрицы $D'_{0\bar{\xi}}$. Обозначим эти сингулярные числа $v_1(\bar{\xi}), \dots, v_s(\bar{\xi})$. Оценим $v_j(\bar{\xi})$ снизу. $v_j^2(\bar{\xi})$, $j=1, \dots, s$ являются собственными числами матрицы $D'_{0\bar{\xi}} \cdot {}^t D'_{0\bar{\xi}}$.

Представим $(\det U(\bar{\xi}))^{-2}$ в следующем виде (см. [8, стр. 125])

$$(\det U(\bar{\xi}))^{-1} = c^{-1} \int_{\|U(\bar{\xi})\bar{w}\| \leq 1} dw_1 \dots dw_r,$$

где c – постоянная. Производя замену переменных $\bar{v} = B\bar{w}$, представим последний интеграл в виде поверхностного интеграла

$$(\det U(\bar{\xi}))^{-1} = c^{-1} \int_{\|D'_{0\bar{\xi}}\bar{v}\| \leq 1} ds \cdot$$

Производя, далее, ортогональную замену $\bar{t} = P \otimes Q \bar{v}$ получим, согласно лемме 2, равенство

$$(\det U(\bar{\xi}))^2 = \det(D'_{0\bar{\xi}} \cdot {}^t D'_{0\bar{\xi}}) \quad (21)$$

Так как $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_s$ являются сингулярными числами матрицы $D'_{0\bar{\xi}}$ (заметим, что сингулярные числа ${}^t D'_{0\bar{\xi}}$ и $D'_{0\bar{\xi}}$ одинаковы (см. [12, стр.270])), то по теореме Куранта – Фишера ([22 стр.115]) $i+1$ –е сингулярное число v_i ($0 \leq i \leq s-1$) представляется в виде

$$v_{i+1}^2 = \min_{V_{s-1}} \max_{v \in V_{s-1}} R(\bar{u}), \quad 0 \leq i \leq s-1 \quad (22)$$

где V_{s-i} пробегает все $s-i$ мерные подпространства R^s , $\bar{u}$ – все векторы этого подпространства, а $R(\bar{u})$ представляет собой отношение Релея ([22 стр.107]):

$$R(\bar{u}) = \frac{(D'_{0\bar{\xi}} \cdot {}^t D'_{0\bar{\xi}} \bar{u}, \bar{u})}{(\bar{u}, \bar{u})}.$$

Теперь заметим, что ${}^t D'_{0\bar{\xi}}$ - матрица Якоби системы (20) (дифференцирование проводится по $\bar{\xi}$). Поэтому, ее можно представить в виде ${}^t(D(\bar{x}) \cdot {}^t D_1(\bar{x}))$, где $D_1(\bar{x})$ - введенная выше «производная» от $D_0(\bar{x})$, а $D(\bar{x})$ - матрица вида

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} \dots \varphi_{1n-r} & 1 & 0 \dots 0 \\ \varphi_{21} \dots \varphi_{2n-r} & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{r1} \dots \varphi_{rn-r} & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Тогда $D'_{0\bar{\xi}} = {}^t D_1(\bar{x}) \cdot {}^t D(\bar{x})$ и полагая $\bar{\omega} = {}^t D(\bar{x}) \cdot \bar{u}$ представим отношение $R(\bar{u})$ в виде

$$R(\bar{u}) = \frac{(D_1 \cdot {}^t D_1 \bar{\omega}, \bar{\omega})}{(\bar{\omega}, \bar{\omega})} \cdot \frac{(\bar{\omega}, \bar{\omega})}{(\bar{u}, \bar{u})} = R_1(\bar{\omega}) \cdot \frac{(\bar{\omega}, \bar{\omega})}{(\bar{u}, \bar{u})}. \quad (24)$$

Очевидно, $\bar{\omega} \in R^{4k}$ и строки матрицы $D(\bar{x})$ ортогональны к градиентам функций $f_i(\bar{x})$ из системы (3) (это известный факт анализа). Соотношения (22) теперь могут быть записаны в виде $v_{i+1}^2 = \min_{W_{s-1}} \max_{\bar{\omega} \in W_{s-1}} R_1(\bar{\omega}) \cdot \frac{(\bar{\omega}, \bar{\omega})}{(\bar{u}, \bar{u})}$. Причем

W_{s-i} – образ V_{s-i} при преобразовании $\bar{\omega} = {}^t D(\bar{x}) \cdot \bar{v}$, следовательно, является подпространством размерности $s-i$ в R^{4k} , ортогональное к градиентам функций f_j , $j=1, \dots, 4k-s$, $\bar{\omega}$ пробегает все векторы этого подпространства. Из вида матрицы $D(\bar{x})$ (см. (23)) видно что

$$(\bar{\omega}, \bar{\omega}) = ({}^t D \bar{u}, {}^t D \bar{u}) = (\bar{u}, \bar{u}) + (L_0 \bar{u}, \bar{u}) \geq (\bar{u}, \bar{u}), \quad (25)$$

где L_0 – неотрицательно определенная матрица размера $s \times s$:

$$L_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \dots \varphi_{1,4k-s} \\ \dots \\ \varphi_{s1} \dots \varphi_{s,4k-s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{11} \dots \varphi_{s1} \\ \dots \\ \varphi_{1,4k-s} \dots \varphi_{s,4k-s} \end{pmatrix}.$$

Из (24) и (25) получаем $R'(\bar{u}) \geq R_1(\bar{\omega})$ и, поэтому

$$v_{i+1}^2 \geq \min_{W_{s-1}} \max_{\bar{\omega} \in W_{s-1}} \frac{(D_1 \cdot {}^t D_1 \bar{\omega}, \bar{\omega})}{(\bar{\omega}, \bar{\omega})} \quad (26)$$

Если отбросить условие ортогональности W_{s-i} к градиентам функций f_j , $j=1, \dots, 4k-s$, то от этого $\min$ на правой части (26) может лишь уменьшаться.

Поэтому мы получаем $v_{i+1}^2 \geq \min_{W_{i-1}} \max_{\bar{\omega} \in W_{i-1}} \frac{(D_1^t D_1 \bar{\omega}, \bar{\omega})}{(\bar{\omega}, \bar{\omega})}$, где уже W_{s-i} –

произвольное подпространство R^{4k} размерности $s-i$. Тогда правая часть последнего неравенства, по теореме Куранта – Фишера, даст нам $4k-s+i+1$ характеристическое число матрицы $D_1^t D_1$. Следовательно, $v_1 \dots v_s \geq a'_{4k-s+1} \dots a'_{4k}$, где $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_{4k}$ сингулярные числа матрицы D_1 . Таким образом, мы доказали неравенство $|\det U(\bar{\xi})| \geq G_1(\bar{x})$, где $G_1(\bar{x})$ обозначает произведение последних (наименьших) s сингулярных чисел матрицы D_1 . Теперь определим подобласть в Π_n^0 с помощью неравенства $G_1(\bar{x}) \geq G_1$, при некотором, ниже уточняемом, положительном G_1 . На оставшейся части имеем $G_1(\bar{x}) \leq G_1$. Обозначая μ_1, μ_2 площади соответствующих частей, получаем

$$\int_{\Pi_n^0, b_1 \leq H} d\sigma \leq \mu_1 + \mu_2.$$

Имеем:

$$\mu_1 \leq G_1^{-1} \int_{\substack{0 < \rho_1 \dots \rho_s \leq H \\ \rho_1 \leq \dots \leq \rho_s \leq L}} du_1 \dots du_s; \quad (27)$$

где L – максимальное значение нормы матрицы D_0 . Интеграл на правой части неравенства (27) разобьем на сумму интегралов вида

$$J_p = \int_{\substack{H 2^{-p} < \rho_1 \dots \rho_s \leq H 2^{1-p} \\ \rho_1 \leq \dots \leq \rho_s \leq L}} du_1 \dots du_s, \quad p = 1, 2, \dots$$

Имеем $H 2^{-p} < \rho_1 L^{s-1}$, т.е. $\rho_1 \geq H 2^{-p} L^{1-s}$.

Поэтому,

$$\begin{aligned} I_p &\leq \int_{H 2^{-p} L^{1-s}}^L du_1 \dots \int_{H 2^{-p} L^{1-s}}^L du_{s-1} \int_{H 2^{-p} u_1^{-1} \dots u_{s-1}^{-1}}^{H 2^{1-p} u_1^{-1} \dots u_{s-1}^{-1}} du_s = H 2^{-p} (\log 2^p L^s H^{-1})^{s-1} \leq \\ &\leq H 2^{-p} (p + \log L^s H^{-1})^{s-1} \leq 2^{s-2} H 2^{-p} (\log^{s-1}(L^s H^{-1}) + p^{s-1}). \end{aligned}$$

Суммируя по всем p , из (27) выводим следующую оценку

$$\mu_1 \leq 2^{s-1} H G_1^{-1} \{ \log^{s-1}(L^s H^{-1}) + c_s \}, \quad (28)$$

где $c_s = \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} 2^{-n}$. Теперь из (18) следует

$$\int_{\Pi_n^0, b_1 \leq 1} d\sigma \leq T \left(\frac{4k}{N+2} \right)^{1/2} (2^{s-1} H G_1^{-1} \{ \log^{s-1}(L^s H^{-1}) + c_s \} + \mu_2).$$

Величина μ_2 может быть оценена точно таким образом, если известно, что $G_2(\bar{x}) \geq G_2 > 0$, где $G_2(\bar{x})$ – произведение последних s сингулярных чисел матрицы D_2 , получаемой из D_1 расположением ее столбцов в виде строки и

взятием транспонированной матрицы Якоби полученной системы функций. Следовательно, $\mu_2 \leq \mu'_2 + \mu''_2$, причем μ'_2 оценивается, как выше, через G_2 и т.д. Продолжая таким образом, через несколько шагов мы установим неравенство

$$\int_{\Pi_{n,b_1 \leq 1}^0} d\sigma << G_{d-1}^{-1/(d-1)} (\log h^{-1})^{s-1}, \quad (29)$$

где $d = n + m$ - степень многочлена $F(x, y)$, а постоянная скрывающаяся под знаком $<<$ зависит только от d и k . Заметим, что величины $H, G_1, \dots, G_{d-1}$ определяются равенствами

$$H = l^{-ls/m}, G_1 = H^{1/2} G_2^{1/2}, G_2 = H^{1/3} G_3^{2/3}, \dots, G_{d-2} = H^{1/(d-1)} G_{d-1}^{(d-2)/(d-1)}.$$

Теперь оценим G_{d-1} снизу. Матрица D_{d-1} составлена из частных производных порядка d мономов $x_1^n y_1^m, \dots, x_{2k}^n y_{2k}^m$. Легко видеть, что в каждой строке D_{d-1} содержится хотя бы один ненулевой элемент вида

$$\frac{\partial^d x^n y^m}{\partial x^n \partial y^m} = n!m!.$$

При этом, все остальные элементы соответствующего столбца равны нулю. Следовательно, $D_{d-1} \cdot {}^t D_{d-1}$ диагональная матрица, определитель которой будет положительной постоянной. Итак $\int_{\Pi_{n,b_1 \leq 1}^0} d\sigma << (\log h^{-1})^{s-1}$, и, поэтому

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n << \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(4k\alpha - N\alpha - 2\alpha - 1)} n^K; K > 0,$$

а вместе с ним и особый интеграл сходится. Теорема 2 доказана.

5. Заключение. Из проведенного выше доказательства теорем следует, что матрица показателей данного многочлена играет важную роль. Несмотря на то, что особенности определяются функциональными определителями, с полиномиальными элементами, структура матрицы показателей является основным инструментом для проведенного выше анализа.

Литература

1. Bayramoglu M, Jabbarov I. Sh., Zeynalov A., Ismailova M. "On the structure of tensor fields given on manifolds", Journal of Contemporary Applied Mathematics, v. 15, No 1, 2025, June, 160-174.
2. Hua Loo Keng «On the number of solutions of Tarry's problem» Acta Sci. Sinica, 1952, v.1, №1-pp,1-76.

3. Jabbarov I. Sh. , Meshaik S. A., Ismailova M. M., “On number of sheets of coverings defined by a system of equations in nn -dimensional spaces”, *Чебышевский сб.*, **24**:5 (2023), 16–30
4. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. «Тригонометрические интегралы» Изв. Ан. СССР, сер.мат – 1979, т.43, №5, стр.971-1003.
5. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. «Теория кратных тригонометрических сумм». М, Наука, 1967.
6. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. «Кратные тригонометрические суммы и их приложения» Тр. МИАН, 1980, т.151, с.1-128.
7. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. «Теория кратных тригонометрических сумм» М., Наука, 1987, 368с.
8. Бурбаки Н. «Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра» гл. II-III, М. Наука, 1962, 516 стр.
9. Беллман Р. «Введение в теорию матриц» М, Наука, 1976, 352стр.
10. Виноградов И. М. «Метод тригонометрических сумм в теории чисел» М. Наука, 1971, 160 с.
11. Виноградов И. М. , Карацуба А. А. «Метод тригонометрических сумм в теории чисел» Тр. МИАН СССР, т.168, 1984, стр. 4-30.
12. Воеводин В. В. «Линейная алгебра», М., Наука, 1974.
13. Воеводин В. В. и Кузнецов Ю. А. «Матрицы и вычисления» М.: Наука, 1984, 318с.
14. Гантмахер Ф. Р. «Теория матриц» М, Наука, 1954,492 с.
15. Джаббаров И.Ш. «Об одном тождестве гармонического анализа и его приложениях». Докл. АН СССР, 1990, т.314, №5.
16. Джаббаров И.Ш. «Об оценках тригонометрических интегралов»Тр. РАН, 1994, т.207, стр 82-92.
17. Джаббаров И. Ш. «О показателе сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри», *Чебышевский сб.*, **14**:2 (2013), 74–103.
18. Джаббаров И. Ш., Гасанова Г. К, Исмаилова Л. Г., “Оценка площади поверхности с использованием сингулярных чисел функциональной матрицы содержащей частные производные высокого порядка”, *Proseedings of IAM*, **8**:1 (2019.), 43-54
19. Джаббаров И. Ш. «О многомерной проблеме Терри для кубического многочлена», *Матем. заметки*, **107**:5 (2020), 657–673.
20. Джаббаров И. Ш. «Показатель сходимости особого интеграла двумерной проблемы Терри с однородным многочленом степени 2», *Матем. заметки*, **105**:3 (2019), 375–382.

21. Икромов И. А. «On the convergence exponent of Trigonometrical integrals» Тр. МИАН, 1997, т.218, 179-189.
22. Курант Р. «Курс дифференциального и интегрального исчисления» М, Наука, т.2, 1970, 672с.
23. Ланкастер П. «Теория матриц» М., Наука, 1978, 280с.
24. Никольский С. М. «Курс математического анализа» М., т.1, Наука, 1990.
25. Фихтенгольц Г. М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления» т. 2, М. ГИФМЛ, 1959.
26. Чубариков В. Н. «О кратном тригонометрическом интеграле». Докл. Ан. СССР, 1976, т.227, №6, 1308-1310.
27. Чубариков В. Н. «О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах», Мат. Заметки, т.20, №1, 1976, 61-68.
28. Чаккиев М. А. «О показателе сходимости особого интеграла многомерного аналога проблемы Терри» Изв.РАН, т. 97, №2, 2003. стр. 211-224.
29. Шафаревич. И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972, 567с.
30. Шилов Г. Е «Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных» М, Наука, 1972.

ON CONVERGENCE EXPONENT OF THE SPECIAL INTEGRAL OF TARRY'S PROBLEM WITH COMPLETE POLYNOMIAL OF TWO VARIABLES

I.Sh. Dzhabbarov¹, G.K. Hasanova¹, J.R. Abdullayev¹

¹ Ganja State University, Ganja, Azerbaijan
e-mail: ilgar_js@rambler.ru

Abstract. In the present paper, new estimates from below and above for complete polynomials of two variables are proved. Singularities of the maps defined by monomials of taken polynomial are studied. The lower and upper bounds established for the convergence exponent are quite close and allow to define the exact value of the convergence exponent with an error 2. The method of estimation is based on a formula for the special integral of Tarry's problem expressing the value of the integral by the surface integral of a special form.

Keywords: Tarry's problem, special integral, surface integral, convergence exponent, Gram's determinanat.

References

1. Bayramoglu M, Jabbarov I. Sh., Zeynalov A., Ismailova M. "On the structure of tensor fields given on manifolds", Journal of Contemporary Applied Mathematics, v. 15, No 1, 2025, June, 160-174.
2. Hua Loo Keng «On the number of solutions of Tarry's problem» Acta Sci. Sinica, 1952, v.1, №1-pp,1-76.
3. Jabbarov I. Sh. , Meshaik S. A., Ismailova M. M., "On number of sheets of coverings defined by a system of equations in nn-dimensional spaces", Чебышевский сб., 24:5 (2023), 16–30
4. Arhipov G. I., Karacuba A. A., Chubarikov V. N. «Trigonometricheskie integraly» Izv. An. SSSR, ser.mat – 1979, t.43, №5, str.971-1003.(4. Archipov G. I., KaratsubaA. A., Chubarikov V. N. «Trigonometric integrals» Iza. AS of USSR, math.ser – 1979, v.43, №5, pp.971-1003)
5. Arhipov G. I., Karacuba A. A., Chubarikov V. N. «Teoriya kratnyh trigonometricheskikh summ». M, Nauka, 1967. (Archipov G. I., KaratsubaA. A., Chubarikov V. N. «Theory of multiple trigonometric sums». M.: Nauka, 1967.)
6. Arhipov G. I., Karacuba A. A., Chubarikov V. N. «Kratnye trigonometricheskie summy i ih prilozheniya» Tr. MIAN, 1980, t.151, s.1-128.(Archipov G. I., KaratsubaA. A., Chubarikov V. N. «Multiple trigonometric sums and their applications» Trans. MIAS, 1980, v.151, pp.1-128.)
7. Arhipov G. I., Karacuba A. A., Chubarikov V. N. «Teoriya kratnyh trigonometricheskikh summ» M., Nauka, 1987, 368s. (Archipov G. I., KaratsubaA. A., Chubarikov V. N. «Theory of multiple trigonometric sums». M.: Nauka, 1987, 368p)
8. Burbaki N. «Algebra. Algebraicheskie struktury. Linejnaya i polilinej-naya algebra» gl. II-III, M. Nauka, 1962, 516 str. (Bourbaki N. «Algebra. Algebraic structures. Linear and Polylinear algebra» II-III, M. Nauka, 1962, 516 p)
9. Bellman R. «Vvedenie v teoriyu matric» M, Nauka, 1976, 352str. (Bellman R. «Introduction to the matrix theory» M, Nauka, 1976, 352p)
10. Vinogradov I. M. «Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel» M. Nauka, 1971, 160 s. (Vinogradov I. M. «Method of trigonometric sums in the number theory» M.: Nauka, 1971, 160 p)
11. Vinogradov I. M. , Karacuba A. A. «Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel» Tr. MIAN SSSR, t.168, 1984, str. 4-30. (Vinogradov I. M., Karatsuba A. A. «Method of trigonometric sums in the number theory» Trans. MIAS of USSR, v.168, 1984, pp. 4-30)
12. Voevodin V. V. «Linejnaya algebra», M., Nauka, 1974. (Voevodin V. V. «Linear algebra», M.: Nauka, 1974)
13. Voevodin V. V. i Kuznecov YU. A. «Matricy i vychisleniya» M.: Nauka, 1984, 318s. (Voevodin V. V., Kuznetsov Y. A. «Matrices and calculations» M.: Nauka, 1984, 318p)

14. Gantmaher F. R. «Teoriya matric» M, Nauka, 1954,492 s. (Gantmacher F. R. «Theory of matrices» M, Nauka, 1954,492 p)
15. Dzhabbarov I.SH. «Ob odnom tozhdestve garmonicheskogo analiza i ego prilozheniyah». Dokl. AN SSSR, 1990, t.314,№5. (Dzhabbarov I Sh. «On an identity of harmonic analysis and its applications». Dokl. AS USSR, 1990, v.314, №5)
16. Dzhabbarov I.SH. «Ob ocnkah trigonometricheskikh integralov»Tr. RAN, 1994, t.207, str 82-92. (Dzhabbarov I Sh. «On estimates of trigonometric integrals» Trans. Of RAS, 1994, v.207, стр 82-92)
17. Dzhabbarov I. SH. «O pokazatele skhodimosti osobogo integrala mnogomernoj problemy Terri», CHEbyshevskij sb., 14:2 (2013), 74–103. (Dzhabbarov I Sh. «On convergence exponent of the special integral of multidimensional Tarry's problem», Chebishevskii sbornic, **14**:2 (2013), 74–103.)
18. Dzhabbarov I. SH., Gasanova G. K, Ismailova L. G., “Ocenka ploshchadi poverhnosti s ispol'zovaniem singulyarnyh chisel funkcional'noj matricy soderzhashchej chastnye proizvodnye vysokogo poryadka”, Proseedings of IAM, 8:1 (2019.), 43-54 (Dzhabbarov I Sh., Hasanova G. K., Ismailova L. G. “Estimates for areas of surfaces using singular numbers of functional matrix containing partial derivatives og high order”, Proseedings of IAM, **8**:1 (2019.), 43-54)
19. Dzhabbarov I. SH. «O mnogomernoj probleme Terri dlya kubicheskogo mnogochlena», Matem. zametki, 107:5 (2020), 657–673. (Dzhabbarov I Sh. «On multidimensional Tarry's problem for the cubic polynomial», *Матем. заметки*, **107**:5 (2020), 657–673.)
20. Dzhabbarov I. SH. «Pokazatel' skhodimosti osobogo integrala dvumernoj problemy Terri s odnorodnym mnogochlenom stepeni 2», Matem. zametki, 105:3 (2019), 375–382. (Dzhabbarov I Sh. «Convergence exponent for the special integral of two dimensional Tarry's problem with the homogeneous polynomial of degree 2», Mathematical Notes, **105**:3 (2019), 375–382)
21. Ikromov I. A. «On the convergence exponent of Trigonometrical integrals» Tr. MIAN, 1997, t.218, 179-189. (Ikromov I. A. «On the convergence exponent of Trigonometrical integrals» Trans. MIAS, 1997, v.218, 179-189)
22. Kurant R. «Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya» M, Nauka,t.2,1970,672s. (Courant R. «Course of differential and integral calculus» M., Nauka, v.2,1970, 672p)
23. Lankaster P. «Teoriya matric» M., Nauka, 1978, 280s. (Lancaster P. «Matrix theory» M., Nauka, 1978, 280p)
24. Nikol'skij S. M. «Kurs matematicheskogo analiza» M.,t.1, Nauka, 1990. (Nikolskii S. M. «Course of mathematical analysis» v.1, M: Nauka, 1990)
25. Fihtengol'c G. M. «Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya» t. 2, M. GIFML, 1959. (Fihtengoltz G. M. «Course of differential and integral calculus» v. 2, M. GIFML, 1959)

26. Chubarikov V. N. «O kratnom trigonometricheskom integrale». Dokl. An. SSSR, 1976, t.227, №6, 1308-1310. (Chubarikov V. N. «On a multiple trigonometric integral». Dokl. AS of USSR, 1976, v.227, №6, 1308-1310)
27. Chubarikov V. N. «O kratnyh racional'nyh trigonometricheskih summah i kratnyh integralah», Mat. Zametki, t.20, №1, 1976, 61-68. (Chubarikov V. N. «On multiple rational trigonometric sums and multiple integrals», Mathematical Notes, v.20, №1, 1976, 61-68)
28. Chahkiev M. A. «O pokazatele skhodimosti osobogo integrala mnogomernogo analoga problemy Terri» Izv.RAN, t. 97, №2, 2003. str. 211-224. (Chahkiev M. A. «On the convergence exponent of the special integral of multidimensional analog of Tarry's problem» Izv. RAN, v. 97, №2, 2003. pp. 211-224)
29. Shafarevich. I. R. Osnovy algebraicheskoy geometrii. M.: Nauka, 1972, 567s. (Shafarevich I. R. Foundations of algebraic geometry. M.: Nauka, 1972, 567p
Shilov G. E. «Mathematical analysis. Functions of several real variables»M, Hayka, 1972)
30. Shilov G. E «Matematicheskij analiz. Funkcii neskol'kih veshchestvennyh peremennyh»M, Nauka, 1972.